

# Giới thiệu số p-adic

## một công cụ toán học cho lý thuyết thống nhất

### PHẦN II: ỨNG DỤNG VÀO VŨ TRỤ HỌC VÀ KHOA HỌC NHẬN THỨC

Một trong những vấn đề được các nhà khoa học đặc biệt chú ý đến gần đây là ứng dụng các số p-adic vào vật lý học và nhiều lĩnh vực khoa học khác.

Các số p-adic được nhà toán học Kurt Hensel tìm ra từ cuối thế kỷ 19 (năm 1897) để bổ sung cho tập các số thực, hữu tỷ, số phức. Các số p-adic dẫn đến metric không-Archimedean thích hợp cho sự mô tả không thời gian gián đoạn. Cùng với vẻ đẹp toán học, các số p-adic trở thành một công cụ hữu hiệu giúp các nhà vật lý mô tả chính xác hơn thế giới khách quan trong nhiều lĩnh vực từ vi mô đến vĩ mô: cơ học lượng tử, lý thuyết dây, môi trường đông đặc, vũ trụ học,... và khoa học nhận thức.

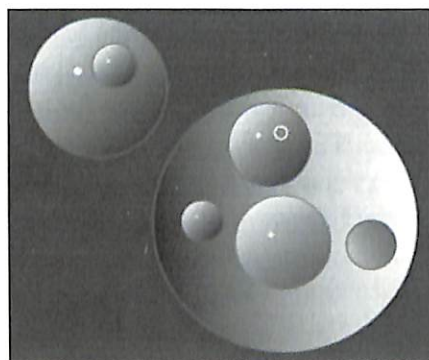
#### 5. LẠM PHÁT VĨNH CỬU CỦA VŨ TRỤ ĐƯỢC MÔ TẢ BẰNG BIỂU DIỄN CÂY P-ADIC

Các nhà vũ trụ học xem vũ trụ chúng ta chỉ là một bong bóng giữa rất nhiều bong bóng không đếm xuê trôi nổi trong một vùng không có hình dạng. Song không đếm xuê có nghĩa như thế nào? Nếu không đếm được thì không tính được xác suất và không tính được xác suất thì không tiên đoán được điều gì cả. Trong năm 2011 Paul Steinhardt xem vấn đề này thuộc bài toán đo đạc (measure problem) trong vũ trụ học và lấy đó làm lý do để nghi ngờ lý thuyết bong bóng của các vũ trụ.

Các nhà vũ trụ khác thì đặt vấn đề là phải tìm cách giải quyết bài toán đo đạc. Các tác giả [5a]

Daniel Harlow, Steve Shenker, và Douglas Stanford, Leonard Susskind (xem hình 6) đã sử dụng lý thuyết các số p-adic để xây dựng mô hình lạm phát. Lý thuyết này liên quan đến những vấn đề cơ bản của vật lý (vũ trụ song song, mũi tên thời gian, vật chất tối và có thể cấu trúc nguyên tử của không thời gian rời rạc). Như chúng ta biết vũ trụ là phẳng (smooth) và trở nên đồng nhất (uniform) nhờ hiện tượng lạm phát của một hệ lớn hơn giả hơn, một hệ

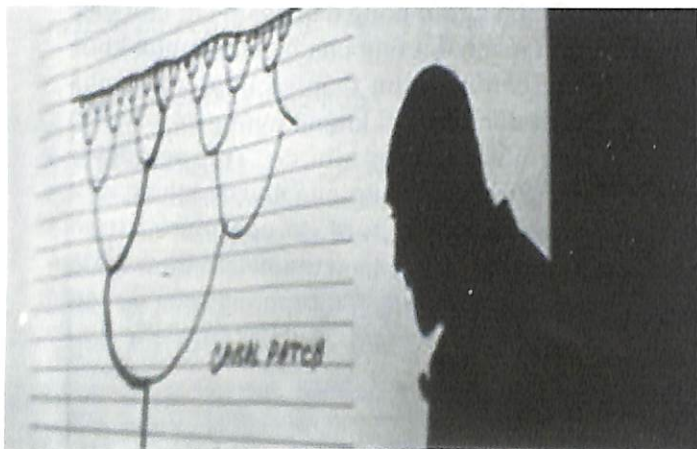
Hình 7. Nhiều bong bóng trong bong bóng rồi liên tục nhiều bong bóng khác trong từng bong bóng... Mỗi bong bóng chỉ có liên quan đến bong bóng tổ tiên mà thôi.



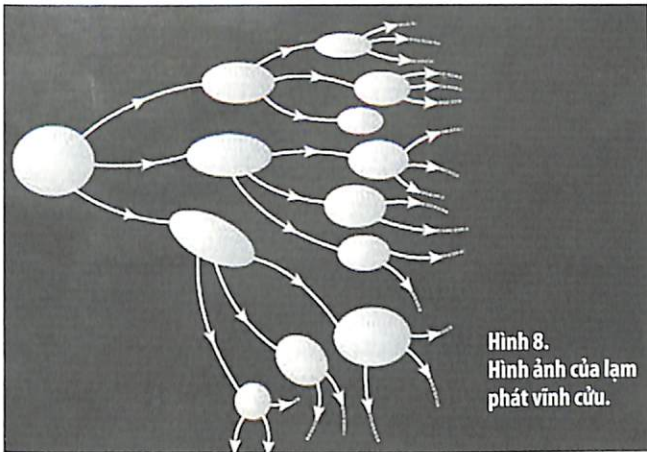
thậm đầy năng lượng tối. Năng lượng tối đã làm cho hệ không ổn định và làm cho các vũ trụ phân thành nhiều hạt nhân bong bóng (nucleate) giống như các hạt mưa trong một đám mây. Vũ trụ của chúng ta phát sinh từ quá trình đó (hình 7).

Quá trình này tạo ra một gia đình cây của vũ trụ (hình 8).

Các số p-adic được ứng dụng vào mô hình hỗn



Hình 6. Leonard Susskind với đồ hình p-adic



Hình 8.  
Hình ảnh của lạm  
phát vĩnh cửu.

độn (stochastic) của lạm phát vĩnh cửu. Hãy xét một hệ gồm nhiều điểm tách rời nhau ứng với những chân không (vacuum) ban đầu và từ những điểm đó ta sẽ có một bức tranh phát triển mô tả quá trình lạm phát vĩnh cửu. Bức tranh lạm phát vĩnh cửu là quá trình hình thành những hạt nhân bong bóng (bubble-nucleation) từ những vacuum ban đầu. Mỗi vacuum có một hằng số vũ trụ tỷ lệ với bình phương tốc độ dẫn nở  $H$  và một entropy.

Rõ là đối với những chân không cuối cùng (vacua terminal) hằng số vũ trụ bằng không hoặc âm vì ở biên không còn dẫn nở nữa.

Lạm phát được mô tả bằng cách chia các tế bào thành hai (xét trường hợp  $p=2$ ) như vậy ta có từ một tế bào ta sẽ có 2 tế bào sau bước đầu tiên. Nếu liên tiếp làm như thế thì ta mô hình dẫn nở theo hàm mũ (exponential).

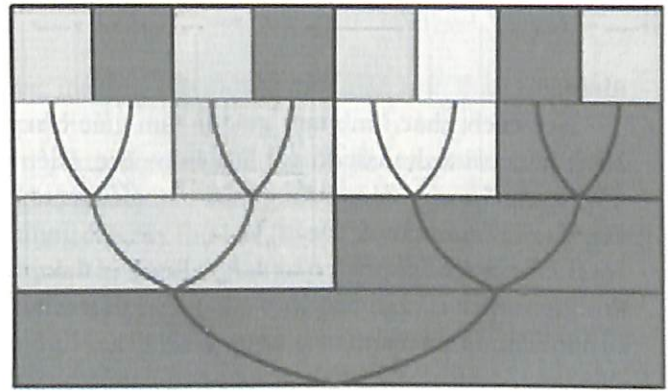
Chân không cuối cùng đóng vai trò quan trọng trong lạm phát vĩnh cửu. Chân không cuối cùng là chân không từ đó không còn phân chia nữa. Chân không với hằng số vũ trụ  $=0$  là chân không cuối cùng.

Sau đây chúng ta sẽ làm bộc lộ cấu trúc của mô hình tế bào. Quá trình phân chia tế bào có thể biểu diễn bằng một đồ hình cây có thứ bậc (hierarchical tree) nghĩa là một cây có nhiều cành phát triển theo nhiều thế hệ. Và cây có hình học fractal: quá vậy dần chúng ta nhìn gần bao nhiêu đi nữa thì chúng vẫn đồng dạng với nhau, đó là đặc trưng của fractal.

Đồ hình cây gồm các nút (nodes) và đường nối (link còn gọi là edges) và không có vòng kín nào cả. Cây là mô hình tế bào bắt đầu với một đường nối sau phân thành 2 cành. Mỗi cành lại phân thành 2 cành tiếp theo đến vô cùng.

Con số 2 không phải là duy nhất, mỗi cành có thể phân thành  $p=2,3,\dots$  ( $p$  là số nguyên tố). Ở đây ta xét trường hợp tiêu biểu với  $p=2$  (xem hình 9).

Sự thay đổi màu trên hình 9 biểu diễn sự “đột biến-mutation” trong các định luật vật lý từ vũ trụ mẹ,



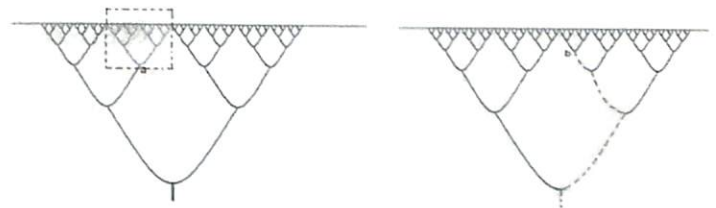
Hình 9. Đồ hình cây sau 3 bước phát triển của mô hình tế bào với  $p=2$ .

điều này có nghĩa là trong các vũ trụ con các định luật vật lý có thể khác các định luật vật lý của vũ trụ mẹ.

Bây giờ trở lại hình học cây của mô hình tế bào.

Mỗi nút có ảnh hưởng đến các đường nối xuất hiện trong hướng tương lai. Tập các nút và đường nối bị ảnh hưởng của một nút đã cho nào đó gọi là tương lai nhân quả của nút đó.

Quá khứ của nút  $a$  là tập tất cả điểm mà tương



Hình 10. Tương lai nhân quả của điểm  $a$  (phần cây nằm trong khung lấm chấm bên trái) và quá khứ nhân quả của điểm  $b$  (phần cây lấm chấm bên phải)

lai nhân quả chứa  $a$ . Nói cách khác quá khứ nhân quả của  $a$  là tập các điểm có ảnh hưởng đến  $a$  hoặc có thể thấy được từ điểm  $a$ . Quá khứ nhân quả là phần trong của hình nón ánh sáng quá khứ của  $a$  (xem hình 10).

Ta có thể đưa vào một cấu trúc metric cho cây. Nhắc lại mỗi tế bào có hằng số Hubble  $H$ . Hằng số Hubble cung cấp một đơn vị cho phép định nghĩa thời gian riêng.

Ta có biên cuối cùng sau  $u_{max}$  đơn vị thời gian.

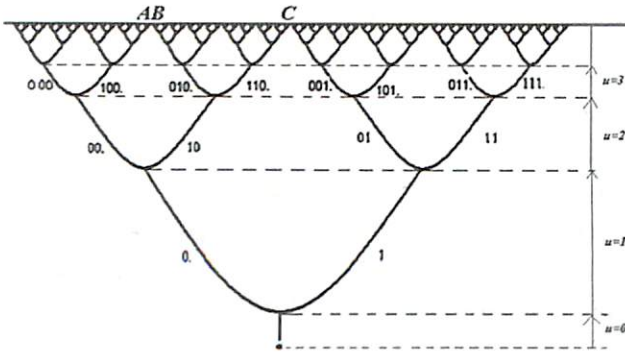
Xét 2 điểm  $x$  và  $y$  trên biên. Hai đường quá khứ xuất phát từ hai điểm này có thể gặp nhau tại một trị số của thời gian  $u_i(x,y)$  (chỉ số  $i$  chỉ điểm giao nhau). Khoảng cách giữa hai điểm  $x$  và  $y$  có thể định nghĩa như  $|x-y|_p = p^{-u_i(x,y)}$

Khoảng cách định nghĩa như trên có một tính chất đặc biệt. Chọn 3 điểm  $x, y, z$  trên biên. Hai trong 3 khoảng cách  $|x-y|_p, |x-z|_p, |z-y|_p$  là bằng

nhau.

Nói cách khác hình tam giác là tam giác cân. Hình học với tính chất đó gọi là siêu metric. Điều này tương đương với bất đẳng thức tam giác mạnh sau  $|x-y|_p \leq \max\{|x-z|_p, |z-y|_p\}$ .

Biên của cây không có hình học Euclide thông thường mà mô tả bởi các số p-adic. Các số p-adic có một cấu trúc siêu metric (xem hình 11).



Hình 11. Cấu trúc cây của những số nguyên 2-adic. Chú ý khoảng cách giữa các điểm nhỏ dần. Đường nằm ngang ở phía trên cùng là biên tương lai của cây với  $p=2$ . Vũ trụ B trông như nằm gần vũ trụ A song thực tế nằm gần vũ trụ C hơn.

Trị số tối đa của  $u$  sẽ gọi là  $u_{max}$  ( $u_{max}$  có thể tiến đến vô cực). Gốc cây ứng với điểm  $u=0$ . Tiếp theo ta tiến lên  $u=1$  ở đây ta tạo phân cành đầu tiên. Trong trường hợp  $p=2$  ta có 2 cành 0 và 1. Tiến lên mức  $u=2$  mỗi cành phân thành hai và ta viết thêm số 0 hoặc số 1 về bên trái và như thế cành 0 phân thành 00 và 10 còn cành 1 phân thành 01 và 11 ( $u_p$  tăng lên). Trong hình 11 cây với  $p=2$  kết thúc tại  $u_{max} = 7$ .

Quan sát hình 11 ta thấy khái niệm khoảng cách trùng với định nghĩa  $|x-y|_p = p^{-u(x,y)}$

Bài toán về đo đạc (measure problem) [5b]

Ta xuất phát từ một điểm và sẽ tiến đến một biên của vũ trụ gồm các số p-adic (đường nằm ngang trên cùng của các hình 10 và 11). Điều đáng ngạc nhiên là những số này không phải là những số như  $1,414... = \sqrt{2}$  hay  $3,1415... = \pi$  mà chúng ta gọi là số thực được dạy trong trường học. Thay vào đó chúng ta có các số gọi là 2-adic (nếu  $p=2$ ) với những tính chất đặc biệt.

Nếu hai điểm có cùng một tổ tiên ở thế hệ thứ  $u$  thì khoảng cách giữa chúng là  $p^{-u}$ .

Để tìm tổ tiên ví dụ của các số nằm đầu và cuối đường biên (xem hình 11) ta phải đi về tận gốc của cây lúc  $u=0$ , như vậy khoảng cách giữa chúng là bằng 1 (= bề rộng toàn bộ của vũ trụ, trường hợp

compact). Đối với các số 000 và 110 tổ tiên là thế hệ thứ nhất ( $u=1$ ) vậy khoảng cách là  $1/2u=1/2$ . Đối với các số 000 và 100 thì khoảng cách là  $1/4$ .

Hai vũ trụ song song trông như vẽ nằm kề nhau song thực tế rất xa nhau vì chúng thuộc hai cành khác nhau của cây và ngược lại hai vũ trụ trông như nằm xa nhau thật sự là nằm kề nhau. Ví dụ trên hình vẽ 11 “vũ trụ” B nằm gần “vũ trụ” C hơn là nằm gần “vũ trụ” A.

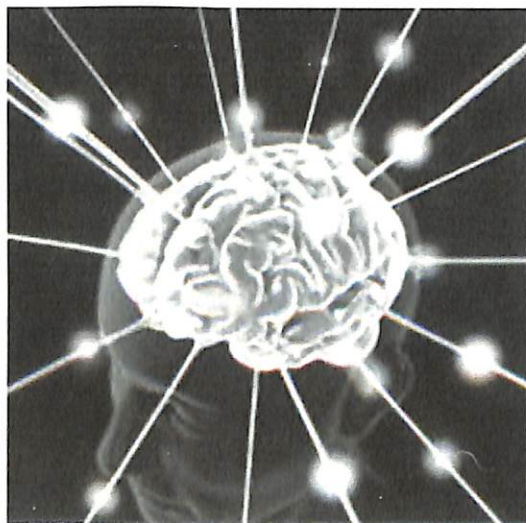
Các nhà vật lý cũng nghĩ rằng vũ trụ có một độ dài nhỏ nhất khả dĩ đó là độ dài Planck, dưới độ dài đó hấp dẫn mạnh đến nỗi khái niệm về không gian mất hết ý nghĩa. Số thực dẫn đến những khoảng cách 0 như vậy không thích hợp cho một không gian gián đoạn, sử dụng chúng có thể vi phạm những đối xứng của vật lý hiện đại. Viết lại các phương trình sử dụng p-adic, các nhà lý thuyết hy vọng nắm bắt được tính gián đoạn của không thời gian một cách có hệ thống như Igor Volovich (Viện toán học Steklov, Moscow) đã chỉ rõ năm 1987.

Các nhà toán học nghiên cứu p-adic vì vẻ đẹp của toán học song bây giờ các số p-adic đã trở thành một công cụ nghiên cứu hữu hiệu các mô hình vũ trụ.

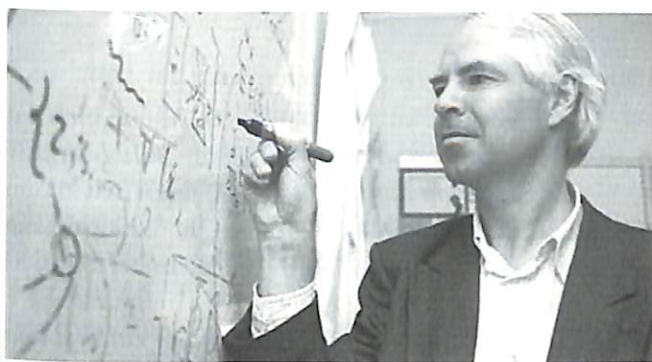
## 6. MỘT MÔ HÌNH P-ADIC TRONG KHOA HỌC NHẬN THỨC (COGNITIVE SCIENCE)

Tại cuộc hội thảo Solvay lần thứ năm (tháng 10 năm 1927) đã xảy ra sự kiện đáng chú ý là cuộc tranh luận giữa Niels Bohr và Einstein về vấn đề liệu tinh thần (mind) và ý thức (consciousness) có phải (theo Bohr) hay không phải (theo Einstein) là một phần của vật lý? (hình 12).

Một số nhà vật lý nghĩ rằng một Lý thuyết của tất cả (Theory of Everything-TOE) phải bao gồm cả vật lý tinh thần (mind physics).



Hình 12. Một lý thuyết thống nhất bao gồm cả vật lý tinh thần (mind physics)



Hình 13. Andrei Khrennikov, GS toán học ứng dụng, Giám đốc Trung tâm quốc tế về mô hình toán học trong vật lý và trong các khoa học nhận thức (International Center for Mathematical Modeling in Physics and Cognitive Sciences), Đại học Linnaeus, Växjö-Kalmar, Thụy Điển.

Sau đây chúng ta sẽ bàn đến hai tiếp cận vật lý tinh thần: tiếp cận quy giản luận (reductionism) lý-sinh của Penrose-Hameroff và tiếp cận thông tin p-adic của Khrennikov.

### **Quy giản luận (reductionism) của Penrose và Hameroff**

Các nhà khoa học thuộc khuynh hướng quy giản luận tìm cách quy các hiện tượng tinh thần về những hiện tượng lý-sinh. Hai nhà khoa học xuất sắc phát triển quy giản luận này là Penrose và Hameroff.

#### **Mô hình p-adic của Khrennikov**

Mô hình ORC-OR (Orchestrated Objective Reduction) của Penrose & Hameroff là một mô hình được nhiều nhà vật lý chú ý song cũng là một mô hình chưa có được một kiểm nghiệm thực tế nào và chịu nhiều sự phê phán từ phía các nhà triết học và khoa học khác (chi tiết về ORC-OR, xin xem [6]).

Sau đây là một mô hình p-adic về khoa học nhận thức (cognitive science) do Andrei Khrennikov (xem hình 13) phát triển. Sử dụng các số p-adic người ta nghĩ rằng có thể đề cập đến vật lý tinh thần một cách thích hợp.

Thực nghiệm cho thấy rằng các trạng thái tinh thần (mental) có những tính chất lượng tử và các hiện tượng tinh thần không thể nhúng vào không gian vật lý thông thường.

Một câu hỏi được đặt ra: ý thức nằm ở đâu trong bộ não con người? Phái quy giản luận (reductionism) cho rằng ý thức (consciousness) sẽ quy về động học của các neurons hoặc các vi quản (microtubules). Song có nhiều ý kiến cho rằng ý thức chắc không phải cư trú trong một không gian vật lý thông thường.

Nhiều hiện tượng thiên nhiên về ý thức đòi hỏi những hình học khác nhau với những không gian khác nhau. Một số nhà khoa học nghĩ rằng cần phải đưa vào một “không gian tinh thần” (mental space) để tiếp cận vấn đề. Trong một loạt công trình nhiều

tác giả đưa vào một không gian tinh thần (mental) p-adic.

Dựa trên kết quả thực nghiệm của sinh lý thần kinh (neurophysiology) và tâm lý học, tác giả [7] dùng các cây thứ bậc (hierarchy tree) p-adic để mô hình hóa không gian tinh thần. Sử dụng các số p-adic cho phép mô tả tô pô (thông qua siêu metric p-adic) của không gian này. Cây thứ bậc sẽ được dùng để mã hóa các thông tin nhận thức cung cấp bởi dây chuyền thứ bậc (hierarchy chain) các neuron.

#### **1/ Ý thức (consciousness) nằm ở đâu**

Có phải ý thức nằm trong não bộ chăng?

Theo Kant, không gian của ý thức là không gian Euclide. Song sau nhiều nghiên cứu người ta thấy ý thức không thể nằm trong một không gian vật lý và hình học Euclide không thích hợp cho bài toán này. Trước tiên ta phải tìm một không gian tinh thần (mental space) thích hợp, sau đó mới có thể mô tả các hiện tượng thuộc nhận thức (cognition) và ý thức (consciousness). Cũng giống như khi mô tả các hiện tượng điện từ chúng ta cũng đã cần một không gian Euclide vậy.

Tác giả [7] đã sử dụng một mô hình thông tin thuần túy cụ thể là không gian của tất cả dây (string) thông tin cung cấp nên bởi các dây neuron sắp xếp theo thứ bậc. Tô pô của không gian được mô tả bởi cây p-adic thứ bậc  $Z_p$  với  $p$  là một số nguyên tố (nói chung là số tự nhiên). Số  $p$  cho ta số cành xuất phát từ mỗi đỉnh của cây.

#### **2 / Dây chuyền thứ bậc các neuron**

Xét một “não bộ” đơn giản cấu tạo bởi một dây chuyền thứ bậc các neuron:  $n = (n_0, n_1, \dots, n_N, \dots)$ .

Mỗi neuron có thể có 2 trạng thái trong trường hợp  $p=2$ .

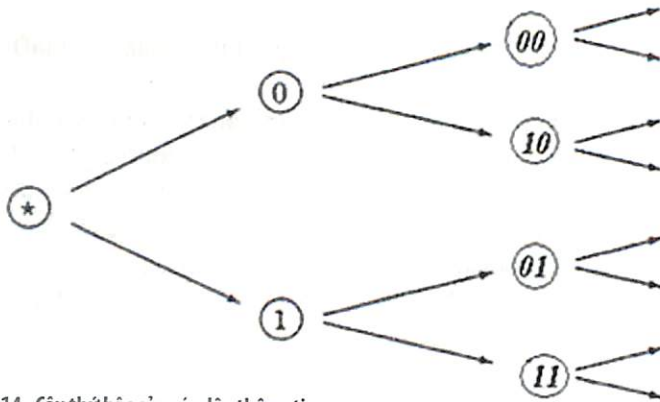
$a_j=1$  (firing-cháy) và  $a_j=0$  (off-không cháy).

Nói chung  $a_j=0, 1, \dots, p-1$  (trong trường hợp p-adic).

Chúng ta giả sử rằng các neuron trên lớp  $n$  được sắp xếp theo thứ bậc, điều đó có nghĩa là neuron  $n_0$  là quan trọng nhất (khởi cháy-igniting),  $n_1$  ít quan trọng hơn và cứ như thế.

Dây  $n$  có khả năng tạo (produce) ra những dây thông tin (information string) với dạng  $x = (x_0, x_1, \dots, x_N, \dots)$  với  $x_j = 0, 1, \dots, p-1$ .

Ta ký hiệu tập của tất cả các dây thông tin như vậy bằng ký hiệu  $Z_p$ . Cấu trúc thứ bậc trong dây  $n$  làm cảm ứng một biểu diễn cây của  $Z_p$ . Như vậy đối với các dây thông tin ta có lại mỗi tương tự về đồ hình như trong lúc xét vũ trụ lạm phát (hình



Hình 14. Cây thứ bậc của các dây thông tin

14). Song ở đây chúng ta đang nói đến một không gian thông tin.

Khoảng cách giữa  $x$  &  $y$  được định nghĩa tương tự:

Đây là metric trên tập  $Z_p$  của cây p-adic. Như chúng ta đã thấy metric p-adic được gọi là siêu metric vì thỏa mãn bất đẳng thức tam giác mạnh

Ý nghĩa hình học của bất đẳng thức trên là: mỗi cạnh của tam giác dài nhất cũng chỉ dài bằng cạnh dài nhất của hai cạnh còn lại. Điều kiện này buộc rằng tam giác phải là tam giác cân. Tính siêu metric rất quan trọng cho hình học p-adic. Thực vậy siêu metric là biểu hiện của thứ bậc. Hiện tại người ta chứng minh rằng trong tô pô trường hợp tổng quát siêu metric làm cảm ứng một biểu diễn cây có thứ bậc và ngược lại.

Có hai thông số quan trọng trong mô hình trên.

Thứ nhất là cấu trúc thứ bậc (hierarchical). Các neurons trên dây chuyền không “ngang quyền” với nhau. Neuron khởi chấy  $n_0$  là nhạc trưởng của dàn nhạc  $n$ . Neuron  $n_1$  tiếp theo ít quan trọng hơn  $n_0$  và liên tiếp như thế. Sự tồn tại tại một thứ bậc như vậy đóng vai trò quan trọng trong việc tạo nên nhận thức (cognition) và thậm chí của ý thức (consciousness).

Một thông số khác là số tự nhiên (natural)  $p$  vốn xác định hệ mã hóa của não bộ  $n$  (một lớp), thông số  $p$  cho ta số dao động cực đại cho một neuron trong dây  $n$  trong một thời khoảng đơn vị của thời gian tinh thần.

### 3/ Không gian thực và p-adic

Mô hình trên tưởng chừng như không có mối liên quan giữa không gian thực và không gian thứ bậc p-adic vốn đang mô tả các trạng thái tinh thần của não bộ.

Phần thực và phần p-adic của không gian vật chất – tinh thần sẽ mô tả song song *não bộ vật lý* và *não bộ tinh thần*. Như vậy phải nói đến không gian adelic. Các biên độ adelic phụ thuộc vào các biến số cơ thể (body, real) lẫn tinh thần (mind, p-adic).

### 4 / Ý thức là một hiện tượng thông tin sinh học

Câu hỏi cơ bản của các mô hình lượng tử thuộc khuynh hướng quy giản luận (reductionism) về ý thức là:

Bằng cách nào mà ý thức phát sinh từ các yếu tố không hứa hẹn gì là vật chất và không thời gian?

Trong mô hình p-adic của Khrennikov ý thức không có mối liên quan trực tiếp đến vật chất. Đây là đặc trưng của cấu hình thứ bậc rất đặc biệt của thông tin. Penrose đã đặt ra câu hỏi: Ý thức là hiện tượng lý-sinh?

Theo Khrennikov thì câu trả lời là: Không! Ý thức không phải là một hiện tượng lý-sinh. Đây là hiện tượng thông tin sinh học (bio-information) mô tả bởi vành số nguyên p-adic  $Z_p$  hoạt động như là một mô hình của không gian tinh thần (mental space).

### KẾT LUẬN

Các số p-adic mở ra một triển vọng mới cho việc xây dựng một lý thuyết thống nhất (có khả năng bao gồm cả vật lý tinh thần -mind physics). Nhiều nhà vật lý đã và đang chuyển các tập  $Z$ ,  $Q$  sang  $Z_p$  và  $Q_p$  trong mọi lĩnh vực vật lý nhằm xây dựng toàn bộ vật lý p-adic. Và cuối cùng là một câu hỏi lý thú đặt ra bởi một số nhà khoa học: liệu cơ sở của vật lý có phải là lý thuyết số hay không? □

### CAO CHI

Tài liệu tham khảo và chú thích

[5a] Daniel Harlow, Stephen H. Shenker, Douglas Stanford, Leonard Susskind, *Eternal symmetree*, arXiv:1110.0496v4 [hep-th] 16 Mar 2012

SU-ITP-11/47

[5b] George Musser, *How Do You Count Parallel Universes? You Can't Just Go 1, 2, 3, ...*, SA-blog August 6, 2012

[6] Cao Chi, *Một số thông tin từ các quan điểm chung của vật lý về vấn đề vật chất sống và không sống*, Kỷ yếu 2009, 150 năm thuyết tiến hóa Charles Darwin, NXB Tri thức 2009

[7] Andrei Khrennikov, International Center for Mathematical Modeling in Physics and Cognitive Sciences, *Classical & quantum mental models based on p-adic representation of information*,

[http://library.mephi.ru/data/scientific-sessions/2003/Lec\\_Neuro\\_2/080.pdf](http://library.mephi.ru/data/scientific-sessions/2003/Lec_Neuro_2/080.pdf)